EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS
PH-M

Epreuve de la banque de notes pour : L'ESEM - L'ISIMA - L'ECOLE NAVALE
L'ESM ST CYR - LE RESEAU EIFFEL

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Préambule

L'objectif de ce problème est d'étudier l'équation différentielle suivante, qui régit le mouvement d'un pendule :

$$(1) \quad x'' + \omega^2 \sin x = 0$$

où ω est un nombre réel strictement positif et $t \mapsto x(t)$ est une fonction de la variable réelle t.

On considère le problème de Cauchy

$$(2) \quad x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = a,$$

où a est un nombre réel.

Dans la première partie, on montre que l'unique solution maximale $t \mapsto \varphi(t)$ du problème de Cauchy (2) est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et qu'elle est impaire. Dans la seconde partie, on détermine les trois types de mouvement possibles, selon le signe de $a - 2\omega$. Dans la troisième partie, on approfondit l'étude du cas où le mouvement est périodique.

PREMIERE PARTIE

1. a) Montrer que le problème de Cauchy (2) admet une solution maximale φ et une seule, définie sur un intervalle ouvert $I =]\beta, \gamma[$ contenant 0. Que peut-on dire d'une solution ψ de (2) définie sur un intervalle J contenant 0 ?

   b) Montrer que φ est de classe C^∞ sur I.

   c) Déterminer φ lorsque $a = 0$.

2. a) Montrer que la fonction $t \mapsto \varphi'^2(t) - 2\omega^2 \cos\varphi(t)$ est constante sur I et égale à $a^2 - 2\omega^2$.

   b) En déduire que φ' est bornée sur I.

3. On se propose de prouver que $I = \mathbb{R}$. A cet effet, on raisonne par l'absurde en supposant, par exemple, que γ est un nombre réel.

a) Montrer que φ admet une limite finie lorsque t tend vers γ par valeurs inférieures.

b) En déduire que φ'', puis φ', admet une limite finie lorsque t tend vers γ par valeurs inférieures.

c) Prouver que φ se prolonge en une fonction de classe C^2 sur $]\beta, \gamma]$.

d) Démontrer finalement que $I = \mathbb{R}$.

4. a) Déterminer en fonction de φ la solution maximale du problème de Cauchy

$$(3) \qquad x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(\delta) = 0, \quad x'(\delta) = a,$$

où δ est un instant donné.

b) Prouver que φ est une fonction impaire.

c) Déterminer en fonction de φ la solution maximale du problème de Cauchy

$$x'' + \omega^2 \sin x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -a.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que a est strictement positif.

DEUXIEME PARTIE

1. Montrer que si φ' s'annule à l'instant α, où α appartient à $\mathbb{R}$, alors a appartient à $]0, 2\omega]$.

2. **Etude du cas où $a = 2\omega$.**

a) On se propose de montrer que, pour tout nombre réel t, $\varphi(t)$ appartient à $]-\pi, \pi[$. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il existe un instant δ tel que $\varphi(\delta) = \pi$. Montrer que $\varphi'(\delta) = 0$. Etablir que φ est constante (on pourra utiliser l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy associé à (1) à l'instant δ). Conclure.

b) Prouver que, pour tout nombre réel t, $\varphi'(t) > 0$.

En déduire que φ est la solution maximale sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$x' = 2\omega \cos \frac{x}{2}, \quad x(0) = 0.$$

c) Expliciter cette solution φ, étudier ses variations et son comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$.

3. **Etude du cas où $a > 2\omega$.**

a) Prouver que, pour tout nombre réel t, $\varphi'(t) \geq \sqrt{m}$, où $m = a^2 - 4\omega^2$. Etablir que φ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

En déduire que φ est la solution maximale sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$x' = \sqrt{m + 2\omega^2(1 + \cos x)}, \quad x(0) = 0.$$

b) Soit ψ la fonction réciproque de φ. Montrer que pour tout nombre réel θ,

$$\psi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{du}{\sqrt{m + 2\omega^2(1+\cos u)}}.$$

On pose $T = \psi(2\pi)$. Prouver que, pour tout nombre réel θ, $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta) + T$; en déduire que, pour tout nombre réel t, $\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi$.

4. Etude du cas où $a < 2\omega$.

a) Prouver qu'il existe un nombre réel α et un seul appartenant à $]0, \pi[$ tel que, pour tout nombre réel t, $\varphi'^2(t) = 2\omega^2(\cos\varphi(t) - \cos\alpha)$.

b) Soit ψ la fonction définie sur $]-\alpha, \alpha[$ par :

$$\psi(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{du}{\sqrt{2\omega^2(\cos u - \cos\alpha)}}.$$

Prouver que ψ admet une limite finie, notée τ, lorsque θ tend vers α. Etablir enfin que ψ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $]-\alpha, \alpha[$ sur $]-\tau, \tau[$.

c) On note χ l'application réciproque de ψ. Montrer que χ est solution du problème de Cauchy (2) sur l'intervalle $]-\tau, \tau[$, et se prolonge en une fonction de classe C^2 sur $[-\tau, \tau]$, encore notée χ. Prouver que la restriction de φ à $[-\tau, \tau]$ est égale à χ.

d) Soit $\hat{\chi}$ la fonction définie sur $[\tau, 3\tau]$ par $\hat{\chi}(t) = -\chi(t - 2\tau)$. Prouver que $\hat{\chi}$ est solution sur $[\tau, 3\tau]$ d'un problème de Cauchy associé à l'équation (1) à l'instant τ. En déduire que la restriction de φ à $[\tau, 3\tau]$ est égale à $\hat{\chi}$.

e) Soit $\hat{\varphi}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t + 2\tau)$. Prouver que $\hat{\varphi} = -\varphi$; en déduire que φ est 4τ-périodique.

f) Déterminer en fonction de τ les nombres réels t tels que $\varphi(t) = 0$, puis les nombres réels t tels que $\varphi'(t) = 0$.

g) Donner l'allure de φ sur l'intervalle $[-\tau, 3\tau]$, dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on suppose que $a < 2\omega$. Pour tout élément α de $]0, \pi[$, on pose :

$$T(\alpha) = 4\int_0^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{2\omega^2(\cos u - \cos\alpha)}}.$$

On note f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}}.$$

1. Développement de f en série entière.

a) Montrer que la fonction $\upsilon \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et expliciter ce développement, que l'on écrira sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\upsilon^{2n}$.

b) Pour tout entier naturel n, on note u_n la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $u_n(\theta) = \frac{a_n}{n!}\lambda^{2n}\cos^{2n}\theta$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c) En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-1, 1[$, sous la forme $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} I_{2n}\lambda^{2n}$ où, pour tout entier $p \geq 0$, $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\theta \, d\theta$.

d) Etablir une relation de récurrence entre I_{p+1} et I_{p-1}. En déduire que le rayon de convergence de la série entière précédente est égal à 1. Calculer I_{2n} et expliciter cette série entière.

2. Etude de $T(\alpha)$ au voisinage de $\alpha = 0$.

a) Montrer que :

$$T(\alpha) = \frac{4}{\omega} f\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

On pourra utiliser, en le légitimant, le changement de variable $t = \dfrac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

b) Etablir que T admet un développement limité à tout ordre au voisinage de $\alpha = 0$ et expliciter les termes d'ordre inférieur ou égal à 3 de ce développement.

3. Recherche d'une partie principale.

Soit ρ une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs strictement positives telle que $\rho(0) = 1$. On note g et h les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\mu^2 + \theta^2\rho^2(\theta)}} \qquad \text{et} \qquad h(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\mu^2 + \theta^2}}$$

a) Calculer $h(\mu)$. Prouver que $\mu \mapsto h(\mu) + \ln(\mu)$ admet une limite finie lorsque μ tend vers 0.

b) Montrer que $g - h$ est bornée.

c) En déduire un équivalent de $g(\mu)$ au voisinage de $\mu = 0$.

4. Etude de $T(\alpha)$ au voisinage de $\alpha = \pi$.

a) Montrer que $T(\alpha) = \dfrac{4}{\omega}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\theta}}$.

b) Déterminer le comportement asymptotique de $T(\alpha)$ au voisinage de $\alpha = \pi$ (pour cela, on utilisera les résultats de la question 3).